Representação de rotações no espaço com quatérnios

Flavio Roberto Dias Silva - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

(*Recebido em 09/11/2022. Aceito em 05/12/2022. Publicado em 22/12/2022*)

Resumo: É comum e intuitivo encontrar a representação de rotações no espaço em termos de ângulos e eixos, no entanto, existem outras representações para rotações com grandde utilidade pratica. Uma alternativa para a representação de rotações é a utilização de quatérnios. Os quatérnios, entre outras propriedades, podem representar uma rotação no espaço e ser operados, de maneira a representar novas rotações, apenas com operações básicas de soma e produto. Com isso em mente, esse artigo tem o objetivo de mostrar a representação de rotações através de quaternos.

Palavras-chave: quatérnios, rotações, Hamilton.

1 Álgebra dos quatérnios

Nessa seção faremos um levantamento geral da álgebra dos quatérnios, como o intuito do artigo não é o de detalhar e demonstrar todas as definições e propriedades dos quatérnios, sugerimos o artigo GUZZO & TOSTI(2017) que faz a exploração dos elementos da álgebra dos quatérnios.

Os quatérnios foram organizados para estender as propriedades dos números complexos para o espaço tridimensional e sua definição carrega alguns elementos que remetem aos complexos. A seguir damos a definição formal dos quatérnios.

Definição 1. O conjunto dos números quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, é formado por todos os números na forma $q = a + bi + cj + dk$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j, k satisfazendo $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ e $ji = -k$.

Da definição conseguimos retirar uma série de igualdades bastante usuais e recorrentes nas operações com quatérnios, entre elas:

$$
\begin{aligned}
&ijk = (ij)k = kk = k^2 = -1 \\
&ik = i(ij) = i^2 j = -j \\
&kj = (ij)j = ij^2 = -i \\
&ki = k(-j^2)i = -(kj)(ji) = -(-i)(-k) = -ik = j \\
&jk = j(-i^2)k = -(ji)(ik) = -(-k)(-j) = -kj = i
\end{aligned}
$$

Nos cálculos acima é assumida a associatividade da multiplicação nas componentes i, j e k.

Da definição 1, conseguimos observar várias semelhanças com os números complexos, em especial, gostaria de dar destaque aos elementos i, j e k que carregam a propriedade da unidade imaginárias dos números complexos, eles tem o quadrado igual a -1.

Tal como nos complexos, para os números quatérnios, definimos parte real e parte imaginaria e é o objeto da definição a seguir.

Definição 2. Dado um quatérnio $q = a + bi + cj + dk$, definimos a parte real de q como o número real a e denotamos $a = Re(q)$. Também definimos a parte imaginaria de q como o vetor $\overrightarrow{u} = (b, c, d)$ e denotamos $Im(q) = (b, c, d)$.

Nos termos da definição acima identificamos o vetor $\overrightarrow{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ com o quatérnio $bi + cj + dk$, de onde podemos escrever $q = a + \overrightarrow{u}$.

Chamemos de $\mathbb{H}^0$ os quatérnios tais que $Re(q) = 0$ isso é,

$$\mathbb{H}^0 = \{q \in \mathbb{H} \big| Re(q) = 0\},$$

chamaremos também os elementos de $\mathbb{H}^0$ de quatérnios puros.

Definição 3. Dados dois números quatérnios, $q = a + bi + cj + dk$ e $r = e + fi + gj + hk$, dizemos que $q = r$ se, e somente se, $a = e, b = f, c = g$ e $d = h$. De outra forma $q = r$ se, e somente se, $Re(q) = Re(r)$ e $Im(q) = Im(r)$.

As considerações anteriores definem o conjunto dos números quatérnios. No que segue, apresentaremos as operações definidas nesse conjunto.

Definição 4. Definimos a soma entre dois números quatérnios $q = a + bi + cj + dk = a + \overrightarrow{u}$ e $r = e + fi + gj + hk = e + \overrightarrow{v}$ como a aplicação

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & (q, r) & \longmapsto & q + r \end{array}$$

onde a soma é definida por

$$q + r = (a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk) = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k$$

que é equivalente a

$$q + r = (a + \overrightarrow{u}) + (e + \overrightarrow{v}) = (a + e) + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

onde $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ denota a soma usual de vetores em $\mathbb{R}^3$.

É importante destacar que a soma de números quatérnios goza das propriedades usuais de soma, isso é, ela é associativa, comutativa, tem elemento neutro igual a $q = 0 + \overrightarrow{0}$ e um quatérnio $r = a + bi + cj + dk$ tem oposto em relação a soma dado por $w = -a - bi - cj - dk$. Não faremos a demonstração dessas propriedades aqui mas indicamos as bibliografias BUTZGE (2021), GUZZO & TOSTI(2017), HAMILTON(1844) onde podem ser encontradas.

Definição 5. Definimos a multiplicação de um número quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ por um número real α como a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & (\alpha, q) & \longmapsto & \alpha q \end{array}$$

onde a operação é definida por

$$\alpha q = \alpha(a + bi + cj + dk) = (\alpha a) + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k$$

que também pode ser visualizada na forma vetorial como

$$\alpha q = \alpha(a + \overrightarrow{u}) = (\alpha a) + (\alpha\overrightarrow{u}),$$

aqui $\alpha\overrightarrow{u}$ denota a operação usual de multiplicação por escalar de vetores de $\mathbb{R}^3$.

Definição 6. Definimos a multiplicação entre dois números quatérnios $q = a+bi+cj+dk = a+\overrightarrow{u}$ e $r = e + fi + gj + hk = e + \overrightarrow{v}$ como a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{H}\times\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & (q, r) & \longmapsto & qr \end{array}$$

onde a multiplicação é definida por

$$\begin{aligned} qr &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + (ag - bh + ce + df)j + (ah - bg + cf + de)k \end{aligned}$$

que pode ser representado na forma vetorial como

$$qr = (a + \overrightarrow{u})(e + \overrightarrow{v}) = (ae - \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle) + (a\overrightarrow{v} + e\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}),$$

onde $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$ denota o produto interno (ou produto escalar) de vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ o produto vetorial entre vetores de $\mathbb{R}^3$.

É importante destacar que a multiplicação de quatérnios tem a propriedade associativa, porém a multiplicação de quatérnios não é comutativa, basta tomar como exemplo $q = i$ e $r = j$ no conjunto dos quatérnios e verificar que

$$qr = ij = k \text{ e } rq = ji = -k.$$

A multiplicação de quatérnios tem elemento neutro igual a $1 + 0i + 0j + 0k = 1 + \overrightarrow{0}$, ao qual escreveremos simplesmente 1, ficando subentendido que $1 \in \mathbb{H}$. Isso é, dado $q = a + bi + cj + dk$, temos

$$q \cdot 1 = 1 \cdot q = q.$$

Para mais detalhes ver BUTZGE(2021), GUZZO & TOSTI(2017), HAMILTON(1844).

E finalmente, a multiplicação de quatérnios tem o elemento inverso. Dado um quatérnio $q = a + bi + cj + dk = a + \overrightarrow{u}$, tal que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$, este admite elemento inverso pela multiplicação o qual será denotado por q^{-1} e pode ser expresso por

$$q^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + |u|^2}\right) + \left(\frac{-1}{a^2 + |u|^2}\right)\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{a^2 + |u|^2}\right)(a - \overrightarrow{u})$$

onde $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ é a norma usual de um vetor de $\mathbb{R}^3$. Além disso, esse q^{-1} é o único quatérnio que cumpre

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$$

Definição 7. Seja $q = a + \overrightarrow{u} = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$. O módulo de q é o número real definido por

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + |\overrightarrow{u}|^2}.$$

Definição 8. Seja $q = a + \overrightarrow{u} = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$. O conjugado de q é o quatérnio definido por

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk = a - \overrightarrow{u}.$$

Das duas ultimas definições podemos reescrever a expressão para o inverso de um quatérnio. Dado $q = a + bi + cj + dk = a + \overrightarrow{u}$ com $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$, seu inverso pode ser escrito como

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}.$$

Observe que, da igualdade anterior, quando q é um quatérnio de módulo 1, vale que $\overline{q} = q^{-1}$.

2 Representação de rotações com quatérnios

Uma rotação no plano pode ser representada por um número complexo, podemos associar a matriz de rotação aplicada em um vetor com o produto de dois números complexos. A ideia para representar rotações com quatérnios segue o mesmo caminho, representar a matriz de rotação no espaço tridimensional aplicada a um vetor como o produto de dois quatérnios.

Considere o conjunto

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \,|\, |q| = 1\}.$$

Sendo $q \in S^3$, ou seja, um quatérnio de módulo 1, é possível construir um operador de rotação com q de maneira que seu efeito sobre um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^3$, seja rotacioná-lo um angulo $\theta \in \mathbb{R}$ em torno de um eixo especifico BUTZGE(2021), HANSON(2005).

Como já fizemos anteriormente, usaremos a identificação de $u \in \mathbb{R}^3$ com um quatérnio puro $q = 0 + \overrightarrow{u} \in \mathbb{H}^0$, identificando $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^0$ podemos usar a multiplicação de quatérnios para representar as rotações no espaço. Nesse caminho, considere o operador definido abaixo:

Definição 9. Dado $q \in S^3$, o operador de rotação R_q obtido a partir de q é definido por

$$\begin{array}{rccc} R_q: & \mathbb{H}^0 & \longrightarrow & \mathbb{H}^0 \\ & v & \longmapsto & qv\overline{q}. \end{array}$$

O operador definido envolve o produto entre três quatérnios, q e $\overline{q}$ quatérnios de módulo unitário que fazem parte da definição do operador e o quatérnio puro v, o quatérnio no qual age o operador, que se identifica com um vetor de $\mathbb{R}^3$.

Trabalhamos para que esse operador represente uma rotação no espaço, nesse caminho, uma verificação importante de se fazer nesse momento inicial é a boa definição do operador, isso é, se resultado dessa operação realmente é um quatérnio puro de $\mathbb{H}^0$. De fato, seja $q = a + \overrightarrow{u}$ e $v = 0 + \overrightarrow{v}$, teremos

$$\begin{aligned} R_q(v) = qv\overline{q} &= (a + \overrightarrow{u})v(a - \overrightarrow{u}) \\ &= (-\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})(a - \overrightarrow{u}) \\ &= -a\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + a(a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \\ &\quad + (a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{-u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Primeiramente olhemos para a parte real da expressão acima, esta é,

$$\begin{aligned} -a\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle &= -a\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + a\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ é o produto vetorial da geometria analítica e representa um vetor simultaneamente ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e, além disso, o produto interno entre dois vetores ortogonais é zero, de onde concluímos que a parte real $Re(R_q(v)) = 0$, então este é elemento de $\mathbb{H}^0$, confirmando que o operador está bem definido.

Agora trabalhando com a parte vetorial de (1) temos

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + a(a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + (a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{-u} &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + a^2\overrightarrow{v} + a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \\ &\quad - a\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{-u}) \\ &= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + a^2\overrightarrow{v} + 2a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \\ &\quad + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{-u}). \end{aligned} \tag{2}$$

Observe que o último termo de (2) apresenta um duplo produto vetorial, conforme pode ser visto em BOULOS & CAMARGO(2007) e WINTERLE & STEINBRUCH(2000), esse termo pode ser escrito como

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{-u}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{-u} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{-u} \rangle \overrightarrow{u} = -|\overrightarrow{u}|^2 \overrightarrow{v} + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u}$$

e substituindo em (2) teremos

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + a(a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + (a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{-u} = (a^2 - |\overrightarrow{u}|^2)\overrightarrow{v} + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} + 2a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \tag{3}$$

Desta ultima expressão, a equação (3), podemos escrever a atuação desse operador como uma operação matricial. Olhando separadamente para as tres parcelas da soma no lado direito de (3) e considerando que $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ além de $q = a + \overrightarrow{u} = a + bi + cj + dk$ teremos

1º termo

$$(a^2 - |\overrightarrow{u}|^2)\overrightarrow{v} = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

2º termo

$$2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} = 2(bx + cy + dz)\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} b^2 & bc & bd \\ bc & c^2 & cd \\ bd & cd & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

3º termo

$$\begin{aligned} 2a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) &= 2a\begin{pmatrix} i & j & k \\ b & c & d \\ x & y & z \end{pmatrix} \\ &= 2a[(-dy + cz)i + (dx - bz)j + (-cx + by)k] \\ &= 2a\begin{pmatrix} 0 & -d & c \\ d & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somando os três termos teremos uma expressão para (3) que coloca o operador (1) em forma de operador linear

$$R_q(v) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Exemplo 1. Considerando os quatérnios unitários

$$q_x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad q_y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \qquad \text{e} \qquad q_z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}k$$

e um vetor $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ que pode ser associado ao quatérnio puro $v = 0 + xi + yj + zk$ temos

$$R_{q_x}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$R_{q_y}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$R_{q_z}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Observe que as matrizes acima são as conhecidas matrizes de rotação do vetor $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ um angulo de $\frac{\pi}{3}$ em torno respectivamente dos eixos x, y e z.

Exemplo 2. O quatérnio

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{2}{5}}j + \frac{\sqrt{10}}{10}k$$

é um quatérnio unitário e sendo $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ que pode ser associado ao quatérnio puro $v = 0 + xi + yj + zk$ temos

$$R_q(v) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A matriz anterior também representa uma rotação do vetor $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ no espaço tridimensional, mas precisamos de elementos adicionais para descrever com mais precisão essa rotação. Adiante retornaremos a esse exemplo para analisar qual rotação essa matriz representa.

Para mostrar que a imagem de v pelo operador $R_q(v)$ representa uma rotação no espaço para o vetor mostraremos a seguir que esse operador preserva a norma do vetor em $\mathbb{R}^3$. Para isso demonstraremos a igualdade a seguir.

Proposição 10. *Dados $q, r \in \mathbb{H}$ vale*

$$|qr| = |q||r|.$$

Prova. Sejam $q = q_0 + \overrightarrow{v}$ e $r = r_0 + \overrightarrow{u}$. Temos

$$|qr|^2 = |(q_0 + \overrightarrow{v})(r_0 + \overrightarrow{u})|^2$$

$$= \quad |(q_0 r_0 - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle) + (q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})|^2.$$

A partir da igualdade anterior, usando a definição de módulo de quatérnio e módulo de vetor de $\mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$|qr|^2 = (q_0 r_0 - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle)^2 + |(q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})|^2. \tag{5}$$

Na equação (5), lembramos mais uma vez que, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, e também o é para qualquer combinação linear dos dois vetores BOULOS & CAMARGO(2007) e WINTERLE & STEINBRUCH(2000), o que nos diz que

$$|q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}|^2 = |q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}|^2.$$

Retornando essa igualdade a (5) e expandindo também o quadrado da diferença chegamos a

$$|qr|^2 = q_0^2 r_0^2 - 2q_0 r_0 \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle^2 + |q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}|^2. \tag{6}$$

Das definições de produto interno e produto vetorial de $\mathbb{R}^3$ temos

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle^2 + |\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}|^2 \quad = \quad |\overrightarrow{v}|^2 |\overrightarrow{u}|^2$$

e, trabalhando com a norma da combinação linear colocando na forma de produto interno, conseguimos

$$\begin{aligned} |q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v}|^2 &= \langle q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v}, q_0 \overrightarrow{u} + r_0 \overrightarrow{v} \rangle \\ &= q_0^2 |\overrightarrow{u}|^2 + 2q_0 r_0 \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + r_0^2 |\overrightarrow{v}|^2. \end{aligned}$$

Substituindo as duas ultimas igualdades em (6) teremos

$$\begin{aligned} |qr|^2 &= q_0^2 r_0^2 + q_0^2 |\overrightarrow{u}|^2 + r_0^2 |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 |\overrightarrow{u}|^2 \\ &= q_0^2 (r_0^2 + |\overrightarrow{u}|^2) + |\overrightarrow{v}|^2 (r_0^2 + |\overrightarrow{u}|^2) \\ &= (q_0^2 + |\overrightarrow{v}|^2)(r_0^2 + |\overrightarrow{u}|^2) \\ &= |q|^2 |r|^2, \end{aligned}$$

de onde extraindo a raiz temos $|qr| = |q||r|$

□

Com a proposição 10, considerando que o módulo de um quatérnio puro coincide com a norma de vetores de $\mathbb{R}^3$ e que o módulo do quatérnio q é igual ao módulo do quatérnio conjugado $\overline{q}$, podemos verificar que o operador R_q preserva a norma de vetores. De fato

$$|R_q(v)| = |qv\overline{q}| = |q||v||\overline{q}| = |v|,$$

lembrando que q é um quatérnio unitário.

O próximo teorema mostra como é a atuação geométrica do operador R_q no vetor v.

Proposição 11. *Dado* $q = q_0 + \overrightarrow{u} \in S^3$*, então, o vetor* $\lambda\overrightarrow{u}$ *é invariante por* R_q *para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Considere a expressão de R_q dada por (3), reescrevendo para $R_q(\lambda\overrightarrow{u})$ teremos

$$R_q(\lambda\overrightarrow{u}) = (q_0^2 - |\overrightarrow{u}|^2)\overrightarrow{\lambda u} + 2\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\lambda u}\rangle\overrightarrow{u} + 2q_0(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\lambda u}).$$

Na expressão acima podemos observar que $\overrightarrow{u} \wedge \lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ por ser o produto vetorial de dois vetores paralelos e além disso, $2\langle\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{u}\rangle\overrightarrow{u} = 2|\overrightarrow{u}|^2\lambda\overrightarrow{u}$. Com essas últimas identidades chegamos a

$$R_q(\lambda\overrightarrow{u}) = (q_0^2 + |\overrightarrow{u}|^2)\lambda\overrightarrow{u}.$$

Como $q \in S^3$ temos $(q_0^2 + |\overrightarrow{u}|^2) = |q|^2 = 1$ e portanto

$$R_q(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$$

□

Teorema 12. *Dado* $q = q_0 + \overrightarrow{u} \in S^3$*, tal que,*

$$q = q_0 + \overrightarrow{u} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$$

com $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$*, a parte vetorial* $\overrightarrow{w}$ *de* $R_q(\overrightarrow{v}) = q\overrightarrow{v}\overline{q} = 0 + \overrightarrow{w}$ *é a rotação de* $\overrightarrow{v}$ *de um angulo* θ *em torno do eixo gerado por* $\overrightarrow{u}$*, onde* $\theta = 2 \cdot \arccos(q_0) \in [0, 2\pi)$

Prova. Chamemos de V o espaço vetorial gerado pelo vetor $\overrightarrow{u}$ e $V^\perp$ o complemento ortogonal de V e $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. Vamos escrever o vetor $\overrightarrow{v}$ em duas componentes ortogonais, o vetor $\overrightarrow{a}$ na direção de $\overrightarrow{u}$, isso nos diz que, $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e o vetor $\overrightarrow{b}$ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u}$, logo $\overrightarrow{v}$ pode ser escrito como

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{b} \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}$ está associado com um quatérnio puro e, da última igualdade podemos escrever

$$R_q(\overrightarrow{v}) = R_q(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = R_q(\overrightarrow{a}) + R_q(\overrightarrow{b}),$$

onde a última igualdade vem do fato de R ser operador linear por (4).

Usando a proposição 11, teremos que $R_q(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$, temos

$$R_q(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{a} + R_q(\overrightarrow{b}). \tag{7}$$

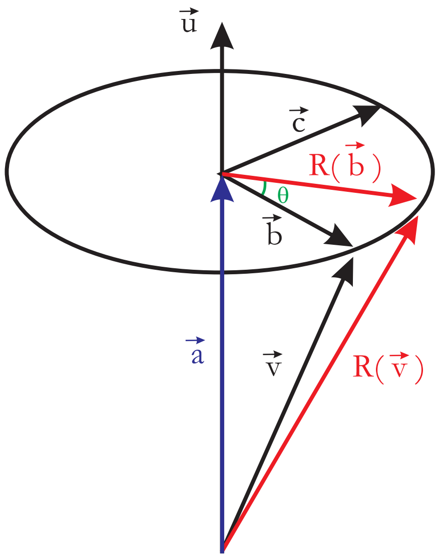

Figura 1: Ação do operador R sobre $\overrightarrow{v}$

Voltaremos nossa atenção para $R_q(\overrightarrow{b})$, usando para o operador a expressão (3) chegamos a

$$R_q(\overrightarrow{b}) = q\,\overrightarrow{b}\,\overline{q} = (q_0^2 - |\overrightarrow{u}|^2)\,\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{u}\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}\rangle + 2q_0(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{b}),$$

onde podemos observar que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{b}$ o que nos dá que $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}\rangle = 0$ e essa expressão pode ser reescrita como

$$R_q(\overrightarrow{b}) = q\,\overrightarrow{b}\,\overline{q} = (q_0^2 - |\overrightarrow{u}|^2)\,\overrightarrow{b} + 2q_0(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{b}).$$

Vamos reescrever a segunda parcela da soma $2q_0(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{b}) = 2q_0|\overrightarrow{u}|\left(\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \wedge \overrightarrow{b}\right)$ e chamemos $\overrightarrow{c} = \left(\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \wedge \overrightarrow{b}\right)$, nesse caso, nossa igualdade se torna

$$R_q(\overrightarrow{b}) = (q_0^2 - |\overrightarrow{u}|^2)\,\overrightarrow{b} + 2q_0|\overrightarrow{u}|\overrightarrow{c}. \tag{8}$$

Observe que o vetor $\overrightarrow{c}$ é elemento de $V^{\perp}$.

Como o quatérnio q é unitário, $|q| = q_0^2 + |\overrightarrow{u}|^2 = 1$, usando a identidade trigonométrica fundamental e o fato que existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad |\overrightarrow{u}| = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Retornando essas informações para (8) temos

$$\begin{aligned} R_q(\overrightarrow{b}) &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\overrightarrow{b} + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{c} \\ &= \cos(\theta)\,\overrightarrow{b} + \operatorname{sen}(\theta)\,\overrightarrow{c} \\ &= \overrightarrow{b}\cos\theta + \overrightarrow{c}\operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

que representa a rotação do vetor $\overrightarrow{b}$ em torno do eixo gerado pelo vetor $\overrightarrow{u}$ de um ângulo θ em $V^{\perp}$. Usando esse último resultado em conjunto com (7), podemos concluir que $R_q(\overrightarrow{v})$, como vetor, representa a rotação do vetor $\overrightarrow{v}$, um angulo θ, em torno do eixo gerado por $\overrightarrow{u}$. $\square$

Exemplo 3. Para representar a rotação do vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ em torno do eixo gerado por $\overrightarrow{u} = (0,2,1)$ de um angulo de $\dfrac{\pi}{2}$, vamos construir o quatérnio segundo o enunciado do teorema 12.

Temos
$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{0^2+2^2+1^2} = \sqrt{5}$$
e
$$\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$
O que nos leva a
$$\begin{aligned} q &= q\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(0, \sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{2}{5}}j + \frac{\sqrt{10}}{10}k. \end{aligned} \tag{9}$$

A expressão (9) é o mesmo quatérnio mencionado no exemplo 2. Aqui damos o significado para a matriz do referido exemplo, essa matriz representa a rotação de um vetor em torno do eixo gerado por $(0,2,1)$ de um angulo de $\dfrac{\pi}{2}$. O exemplo 2 nos diz que $qv\overline{q}$ pode ser calculado pelo produto de matrizes
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}+2}{5} \\ \frac{1-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Observe que $\overrightarrow{w} = R_q(v) = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}+2}{5}, \dfrac{1-2\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ tem a mesma norma,
$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{w}| &= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{20}{25} + \frac{5+4\sqrt{5}+4}{25} + \frac{1-4\sqrt{5}+20}{25}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$$

e para verificar que $\overrightarrow{w}$ é a rotação de $\overrightarrow{v}$ um angulo de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo gerado por $\overrightarrow{u}$, calculemos o angulo entre as projeções de $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ no espaço ortogonal ao subespaço gerado por $\overrightarrow{u}$, sejam $\overrightarrow{w_0}$ e $\overrightarrow{v_0}$ essas projeções, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_0} &= \text{Proj}_{(0,2,1)}(1,0,1) - (1,0,1) \\
&= \frac{\big\langle (0,2,1),(1,0,1) \big\rangle}{5}(0,2,1) - (1,0,1) \\
&= \left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) - (1,0,1) \\
&= \left(-1, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w_0} &= \text{Proj}_{(0,2,1)}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{5}, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right) - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{5}, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right) \\
&= \frac{\left\langle (0,2,1), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{5}, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right)\right\rangle}{5}(0,2,1) - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{5}, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right) \\
&= \left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{5}, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right) \\
&= \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, para concluir que o angulo entre $\overrightarrow{v_0}$ e $\overrightarrow{w_0}$ é $\frac{\pi}{2}$, calculemos o produto escalar

$$\left\langle \left(-1, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \right\rangle = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{25} - \frac{8\sqrt{5}}{25} = \frac{10\sqrt{5}}{25} - \frac{10\sqrt{5}}{25} = 0,$$

o que verifica o desejado.

Conclusões

O Teorema 12 nos diz que a rotação de um vetor $\overrightarrow{v}$ um angulo θ em torno de um eixo unitário $\overrightarrow{u}$ pode ser representada pela multiplicação de quatérnios

$$q\overrightarrow{v}\overline{q}$$

onde

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}$$

que ainda, conforme a dedução em (4), quando representamos o quatérnio q na forma $q = a + bi + cj + dk$, a rotação pode ser representada pela multiplicação de matrizes

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix} \vec{v}.$$

Referências

BOULOS, P; CAMARGO, I. Geometria Analítica - um tratamento vetorial. Prentice Hall, 3a edition, são Paulo, 2007.

BUTZGE, M. S.. Quatérnios e rotações no espaço.2021. 100f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. Cascavel - PR. Disponivel `https://tede.unioeste.br/bitstream/tede/5748/5/Marta_Butzge2021.pdf`. Acesso 15 de Ago. 2022.

GUZZO, S.M.; TOSTI, N. C. (2017, 14/08). Funções elementares no conjunto dos quatérnios: Abordagem por série de potências. Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática , v.1, n.1, p. 44-98, disponível em `http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art6_1701.pdf`. Acesso em: 15 de ago. 2022.

HAMILTON, W. R.. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 25, nº 163 (1844): 2000.

HANSON, A. J.. Visualizing quaternions. In ACM SIGGRAPH 2005 Courses, 1-es. Canada: Association for Computing Machinery, New York, NY, United States, 2005. Disponível em https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.1145/1198555. Acesso em: 15 de mar. 2021.

WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A.. Geometria Analítica. Makron Books, São Paulo, 2000.